

Homo ludens

7 ottobre 2014

“La matematica è un gioco
e comunica totale magia”

a cura di Mimma Liber



Il “gioco adulto” della ricerca

- *La caccia al tesoro*: la posta in gioco è la conoscenza
- *La magia* del prestigiatore: la meraviglia dei risultati e la voglia di scoprire il trucco



Perché allora la matematica risulta così arida, fredda, difficile?

..perché si presentano i risultati senza i processi

..perché non si accompagnano i ragazzi passo passo nella salita

..perché, senza aver giocato anche loro, non possono gustare i panorami che vedono da lassù...

..perché non si misurano mai con l'immaginazione, lo sforzo di ricerca, la curiosità di problemi intriganti ..nello stesso tempo vicini e lontani

.....

Eppure...la matematica è un gioco

Il tavolo: la realtà...ma anche oltre

La scommessa: trovare ordine nel caos

I giocatori: i matematici nel tempo
gli allievi oggi

Le regole: metodi di indagine

Le mosse: intuizione, immaginazione,
controllo rigoroso della coerenza interna



se la matematica è un gioco
se il gioco non si spiega, ma si fa



se non si gioca il gioco matematico, non
si apprende la matematica

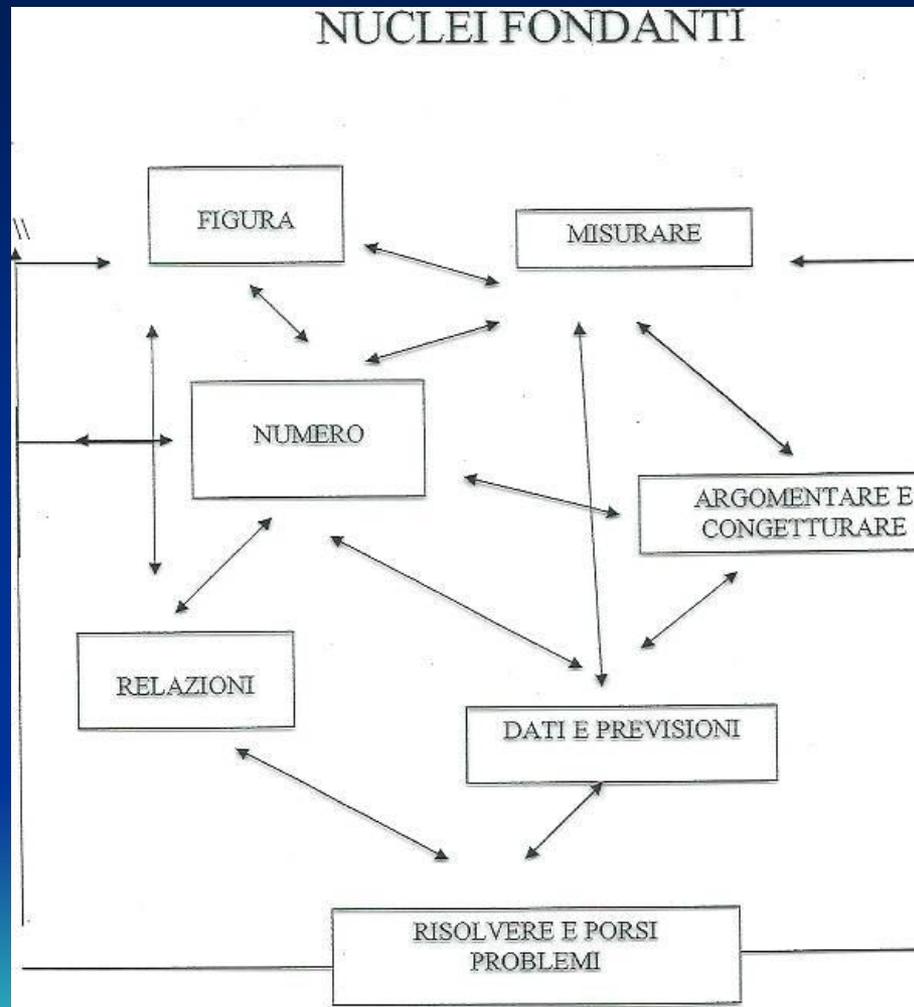
Il gioco della “caccia al tesoro”

La matematica gioca per
dare ordine al caos

L'allievo gioca per crescere



Quali sono gli “oggetti” della matematica?



Le principali categorie spazio-temporali per individuare, distinguere confrontare,

- davanti / dietro
- prima / dopo
- grande / piccolo alto / basso
- vicino / lontano
- maggiore / minore / uguale parte/tutto
- sopra / sotto uguale / diverso
- simile / dissimile

figura forma quantità



Le principali categorie logiche

- possibile / impossibile
- probabile / improbabile
- certo / incerto
- necessario / non necessario
- giusto / sbagliato ordinato / disordinato
- Collegato / scollegato
- causa – effetto

se  allora ..altrimenti
se  allora

Matematizzare una situazione di gioco

- In quanti modi si può costruire un rettangolo con una cordicella di lunghezza fissa, modificandola con le dita, in modo che i lati abbiano lunghezza intera?
- O, più semplicemente, : in quanti modi si può ottenere per somma un numero dato?



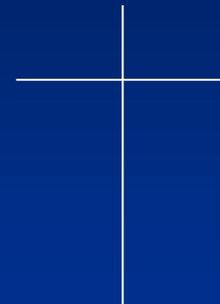
...una catena di domande...e di risposte

- se cordicella è lunga 24 cm, la domanda è: in quanti modi posso ottenere il numero 12?

•	0	12
•	1	11
•	2	10
•
•	11	1
•	12	0

0.5	11.5
1.5	10.5
2.5	9.5
.....

0.25	11.75
1.25	10.75
.....



Ma fino a quando?

Interpolazione , estrapolazione, generalizzazione
Dal discontinuo al continuo



Cosa c'è *prima* del numero?

- la conservazione della quantità
- la corrispondenza biunivoca

dove ci sono più palline?

.....
.....

.....
.....

↑↑↑
↓ ↓ ↓
.....



Giochi di magia matematica *(ovvero la certezza del trucco)*

- pensa un numero intero
- moltiplicalo per 2
- aggiungi dieci al prodotto ottenuto
- dividi per due il totale
- sottrai il numero a cui avevi pensato
- come mai tutti avete ottenuto 5?



oppure...

- scegli un numero intero di due cifre
- sottrai da questo numero i valori di ciascuna delle sue due cifre
- somma le cifre del numero ottenuto
- come mai tutti avete ottenuto 9?
- (la differenza fra identità ed equazione)



avvio al linguaggio simbolico
l'algebra....che semplifica la vita

- Numero N
- Il suo doppio: $2N$
- Aggiungo 10: $2N + 10$
- Divido per 2 e sottraggo N : $N+5 - N$
 $= 5$



Con due cifre

- Numero N : $10x + y$
- $10x + y - (x+y) = 9x$
- ...ma ogni multiplo di 9 ha come somma delle cifre il 9
- Infatti...ogni multiplo di 9 si ottiene sommando 9 al multiplo precedente, che è come sommare 10 e togliere 1, cioè aumentare di uno la cifra delle decine e diminuire di 1 quella delle unità...quindi la somma delle cifre resta sempre 9



La matematica con la bilancia

- Un mattone pesa un Kg + mezzo mattone
quanto pesa il mattone?

$$m = \frac{1}{2} m + 1 \text{ kg}$$

tolgo metà mattone da tutti e due i piatti

$$\frac{1}{2} m = 1 \text{ kg}$$

dunque il mattone intero peserà 2kg

La manipolazione fatta con la bilancia viene codificata così

- $X = 1 + X/2$
- $X - X/2 = 1 + X/2 - X/2$
- $X - X/2 = 1$
- $X/2 = 1$
- $2 * X/2 = 2$
- $X = 2$



La magia del 100

- Pensa un numero (n)
- Moltiplicalo per 5 ($5n$)
- Moltiplica il risultato per 4 ($n \cdot 5 \cdot 4$)
- Dividi tutto per il numero pensato ($n \cdot 5 \cdot 4 / n$)
- Moltiplica ancora per 5 e avrai 100!!!



Diofanto, il “padre dell’algebra”

- La fanciullezza di Diofanto durò un sesto della sua vita; dopo un altro dodicesimo della vita la barba coprì le sue guance; dopo un altro settimo si sposò; dopo cinque anni ebbe un figlio, la cui vita durò esattamente la metà di quella del padre; dopo la morte di lui Diofanto sopravvisse ancora quattro anni. Quanti anni visse Diofanto?



Giochi logici

- correttezza del ragionamento
- stimolo a fare previsioni



Un gioco antichissimo

“ Propositiones ad acuendo iuvenes ”

Alcuino

- *“ Salvare capra e cavoli ”*

Un contadino viaggia con un lupo, una capra e un grosso cavolo. Arrivato sulla sponda di un fiume vorrebbe traghettare il carico, ma dispone solo di una piccola barca sulla quale, oltre a lui, può stare solo o il lupo o la capra o il cavolo. Come può organizzarsi facendo in modo che la capra non sia mai sola con il cavolo, né il lupo solo con la capra?



La successione delle mosse

- 0: co,ca,cv,lu
- 1:cv,lu co,ca traghetta la capra
- 2: co,cv,lu ca torna indietro
- 3: cv co,lu,ca traghetta il lupo
- 4: co,ca,cv lu torna indietro con la capra
- 5: ca co,cv,lu traghetta il cavolo
- 6: co,ca cv,lu torna indietro
- 7: ----- co, ca, cv,lu traghetta la capra



La magia dei numeri

“De viribus quantitatis” di Luca Pacioli

Prodotti curiosi

- Partendo da $777 \cdot 143 = 111111$, se moltiplichiamo uno dei due fattori per 2,3,4,5,6,7,8,9 otteniamo:
- $777 \cdot 143 \cdot 2 = 222222$
- $777 \cdot 143 \cdot 3 = 333333 \dots$
-
- $777 \cdot 143 \cdot 9 = 999999$



I numeri “tramezzati”

- $12 * 10101 = 121212$
- $23 * 10101 = 232323$
- $34 * 10101 = 343434$
-
- $58 * 10101 = 585858$
-



Il gioco si fa difficile

*dall'ordine semplice delle
tabelline*

..ad un ordine più nascosto....



la successione di Fibonacci: alla ricerca del “trucco”

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,
610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946,
17711,

Quale “regola” segue questa successione?



...ma la Natura ci aveva già pensato: il problema dei conigli ...

- Supponiamo che una coppia di conigli sia troppo giovane per riprodursi, ma sia abbastanza matura per riprodursi dopo due mesi. Supponiamo poi che i conigli producano una nuova coppia ogni mese, a partire dal secondo
- Se ogni coppia di conigli si riproduce nel modo descritto, quante coppie di conigli ci saranno all'inizio di ciascun mese?



- 1 1 non matura = 1
- 2 1 matura = 1
- 3 1 m + 1 non m = 2
- 4 1 m + 1 non m + 1 m = 3
- 5 1m + 1 non m + 1m + 1m + 1non m = 5

successione di Fibonacci



Il fuco è il maschio delle api e nasce dalle uova, non fecondate, deposte dalle api operaie. Tra i suoi compiti vi è quello di fecondare le uova della regina e da queste nascono api operaie o regine. Il fuco ha un solo genitore (la madre), due nonni (i genitori della madre), tre bisnonni (i genitori della nonna e la madre del nonno), cinque trisnonni (due per ciascuna bisnonna e la madre del bisnonno) e così via.

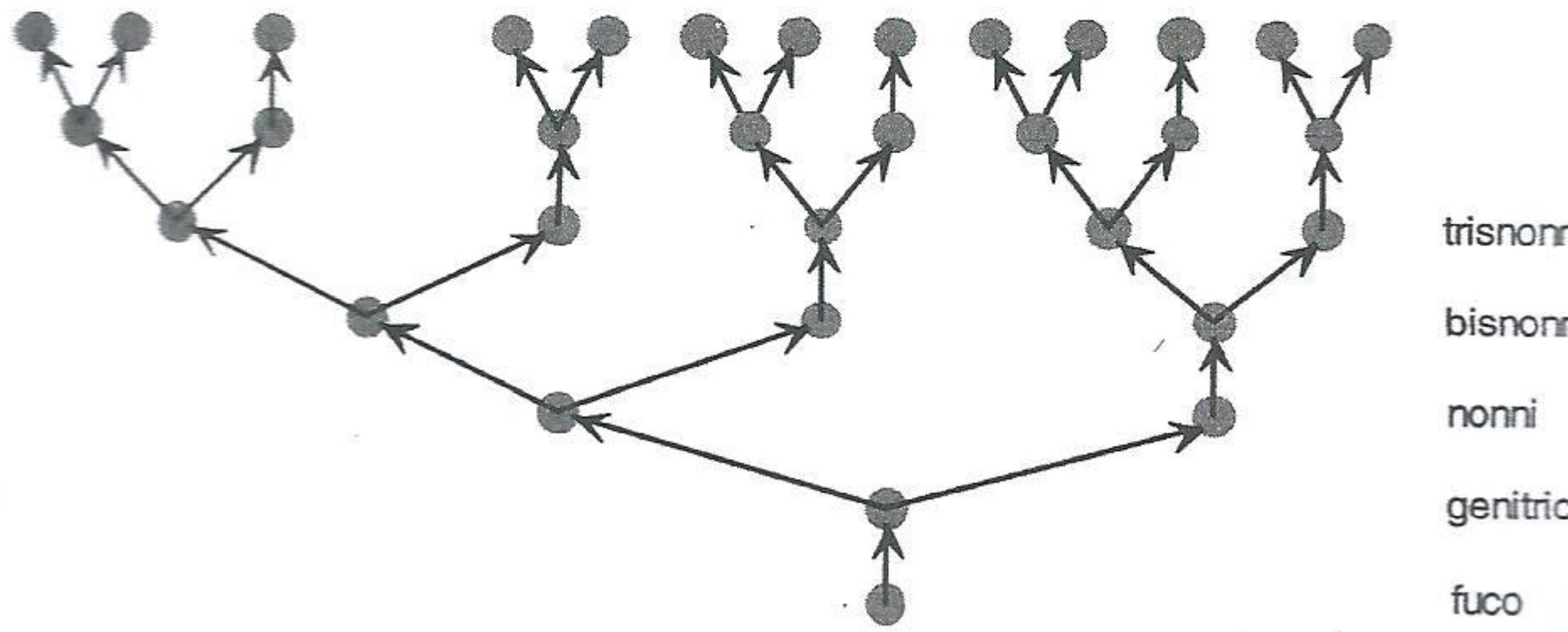
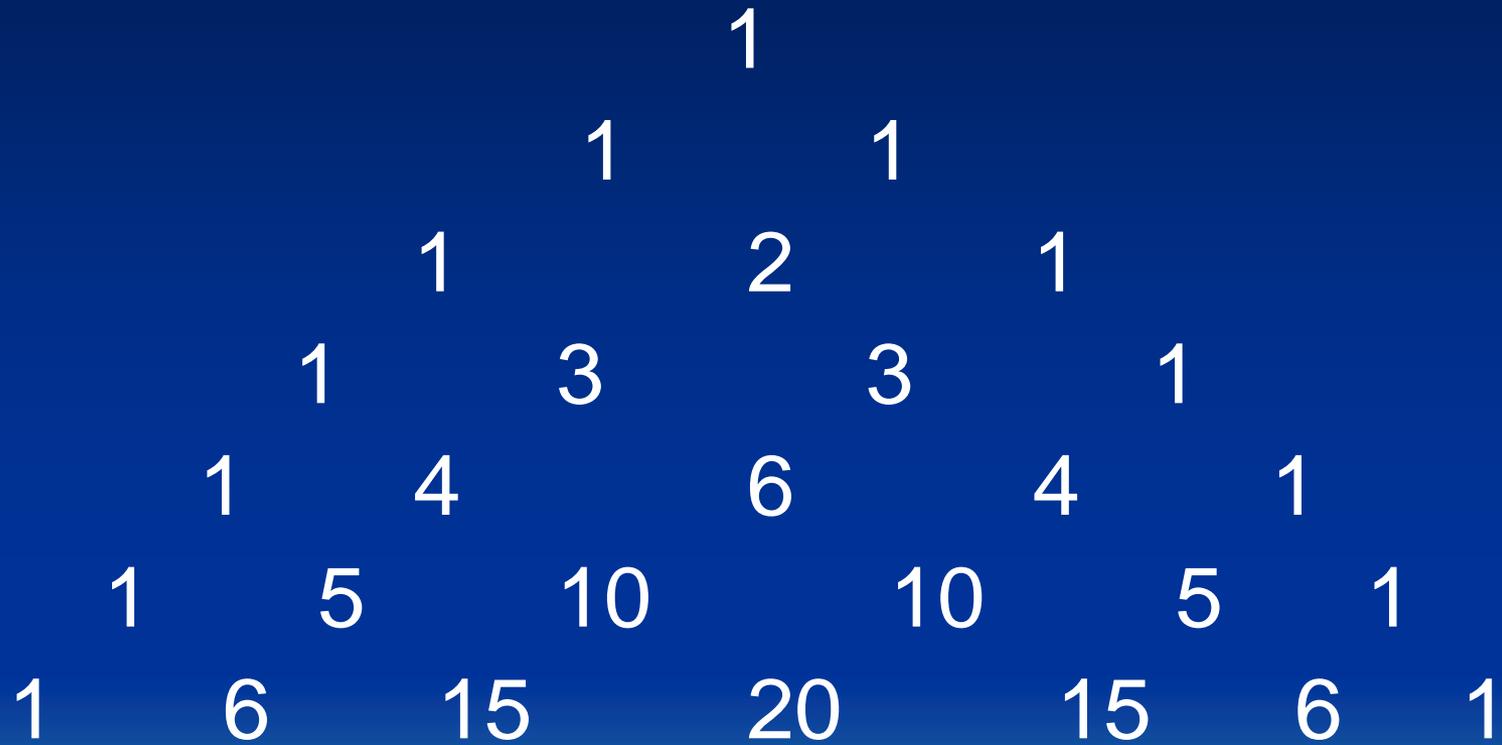


Fig. 14 Nell'albero genealogico del fuco si riconosce la successione di Fibonacci

Il triangolo di Tartaglia, la successione di Fibonacci e la formula binomiale di Newton



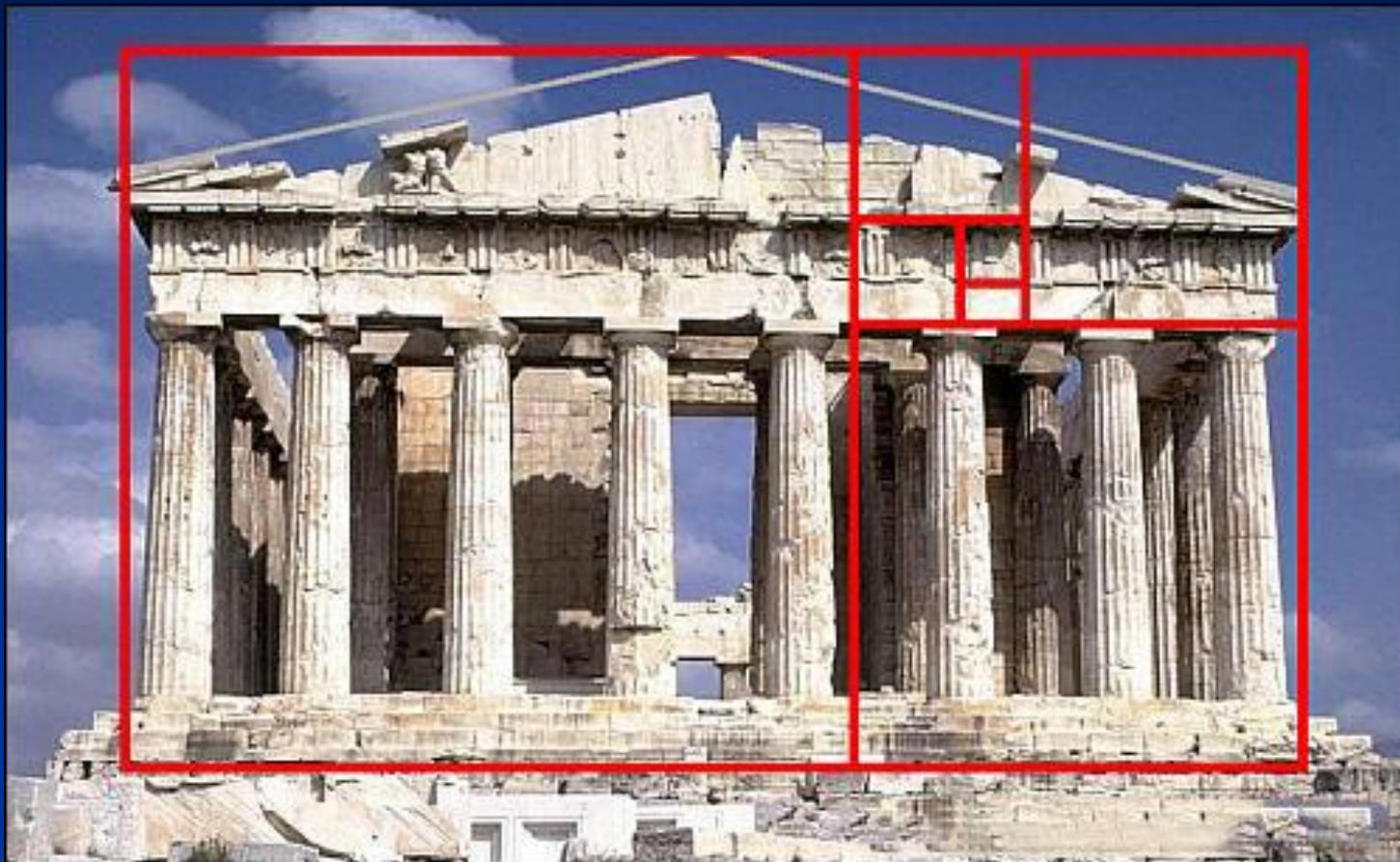
- Questo triangolo numerico ha un fascino straordinario: venne studiato più di mille anni fa da indiani e cinesi e arrivò in Europa attraverso gli arabi. Tartaglia fu il primo ad occuparsene, poi Pascal lo riprese in un'altra versione. Ogni numero, tranne il numero generatore (1 in alto), è la somma dei due numeri sovrastanti. Ai bordi si trova sempre 1. Nelle mani dei matematici questa costruzione curiosa è diventata il riferimento principale del calcolo combinatorio. Pascal scrisse un libro "Le triangle arithmétique"

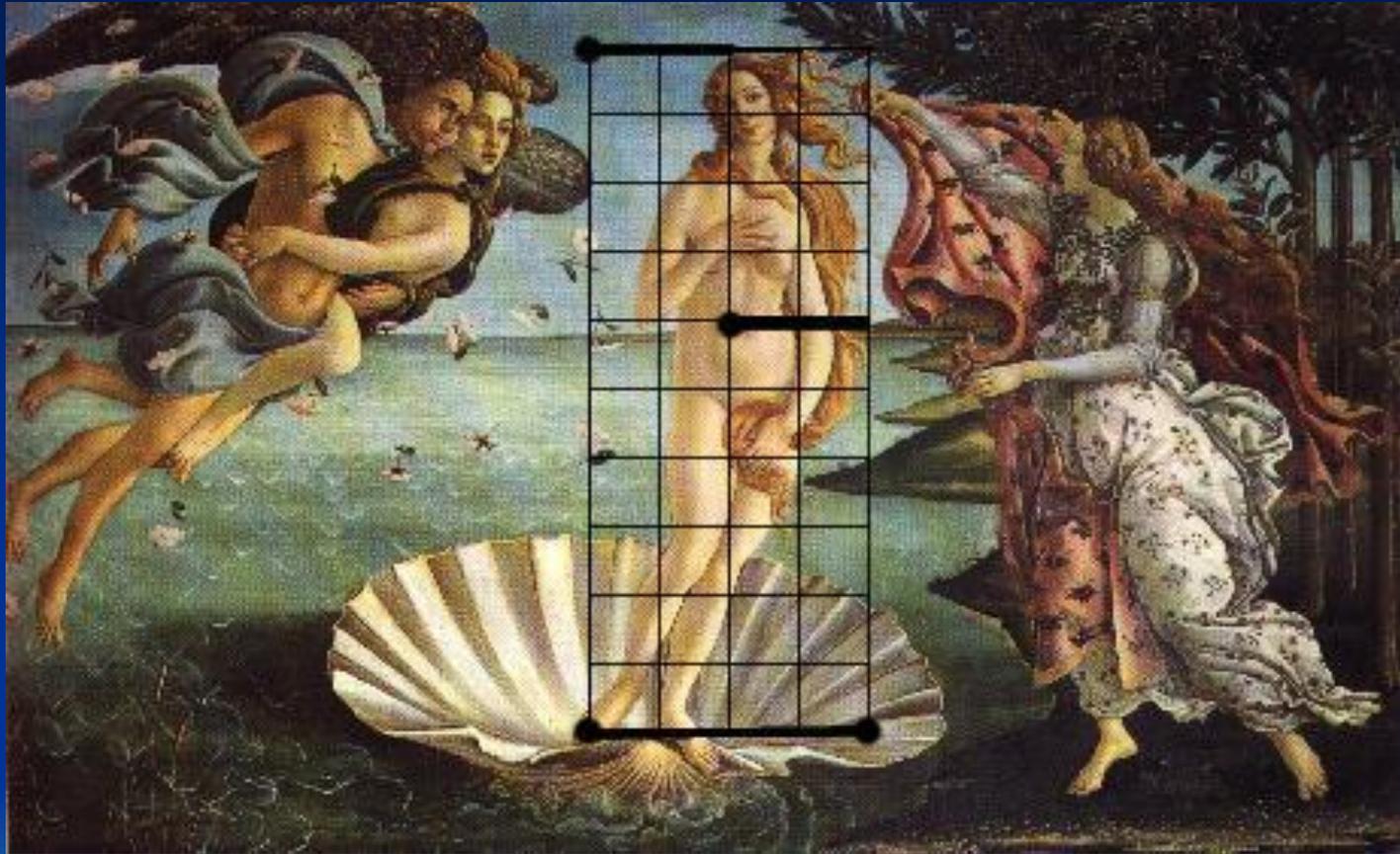


Fibonacci e la *sezione aurea*

*la misura della bellezza nell'arte
e nella natura*



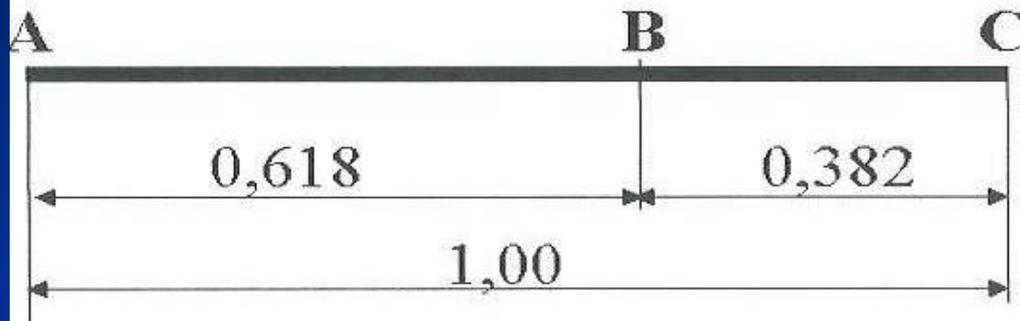






Il rapporto aureo e la successione di Fibonacci: come si misura la bellezza

SEZIONE AUREA

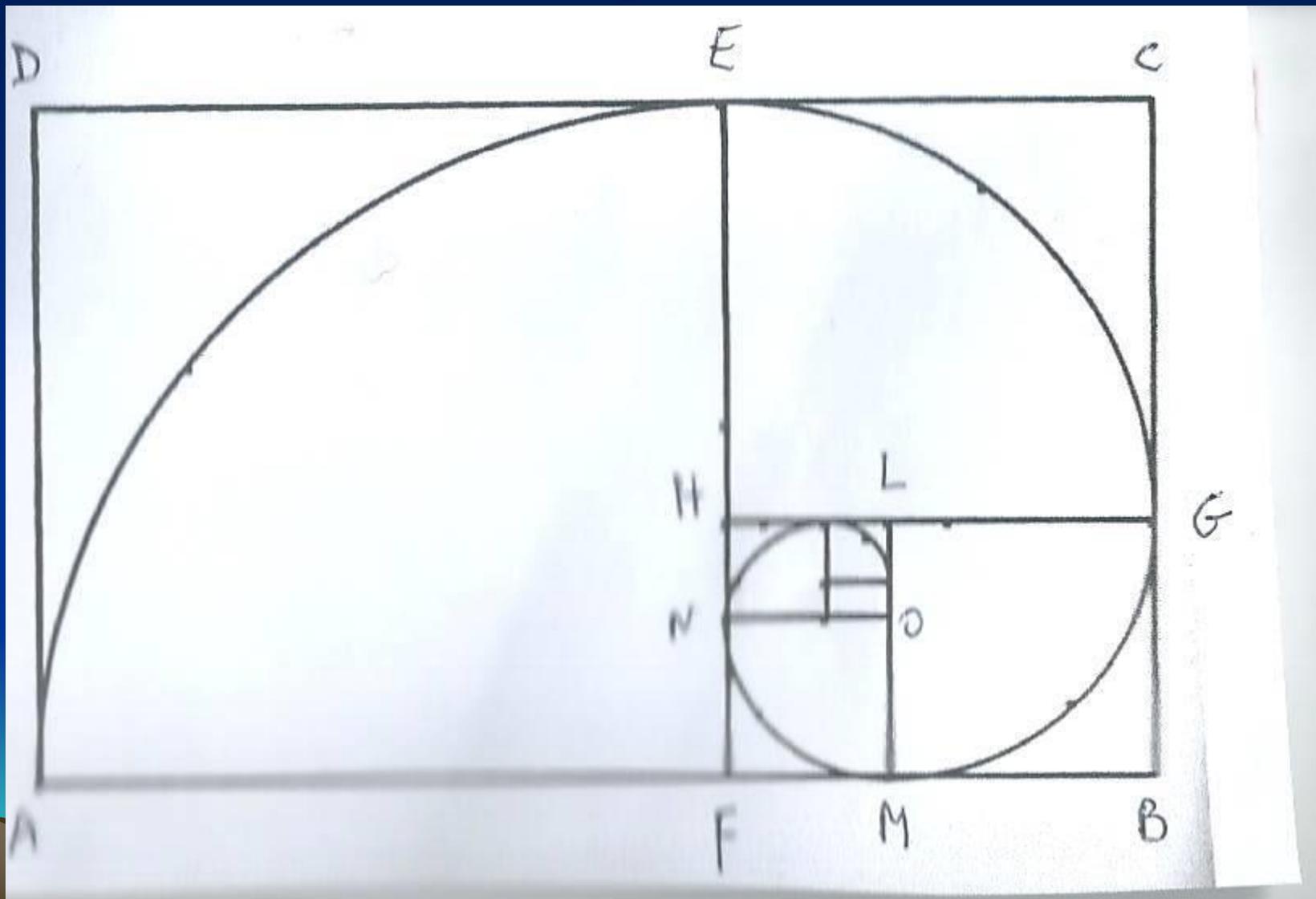


Da un segmento (AC), si ottiene una **sezione aurea** quando il tratto più lungo (AB) sta al tratto più corto (BC) come il tratto più lungo (AB) sta al segmento intero (AC).

Intesi la proporzione è così espressa:

$$BC : AB = AB : AC$$

Il rettangolo aureo



l'anagramma

LA MATEMATICA E' UN GIOCO

E COMUNICA TOTALE MAGIA



L'anagramma e il calcolo combinatorio

Quante parole si possono ottenere anagrammando AMOR?

ROMA, MORA, RAMO, ORMA,..

- Alla ricerca del “possibile”: in quanti modi si possono disporre n elementi?

Es. A B C D E

- alcune permutazioni sono:

- A C B E D * A D C E

- D B A C E *

Alla ricerca del *possibile*

- In quanti modi si possono disporre n elementi?



le permutazioni

- Il numero di permutazioni ottenibile è $n!$
- $1! = 1$
- $2! = 2 * 1 = 2$
- $3! = 3 * 2 * 1 = 6$
- $4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$
- $5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$
-
- $13! = 13 * 12 * 11 * 10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 =$
- 6.227.020.800



- Con 21 lettere dell'alfabeto possiamo dire.....tutto!
- Con 4 elementi componiamo il codice genetico
 - Con 10^{23} molecole in ciascuna grammomolecola.....otteniamo il disordine!!!



- Con questi numeri
cominciamo a...perderci!!!



Eppure....proviamo a giocare con grandi numeri

- ci allontaniamo dalla nostra realtà abituale...
- ...e l'impossibile diventa possibile...
- anche se poco probabile.....



quantità ↔ qualità

- La giusta stima delle dimensioni quantitative della realtà cambia i giudizi di valore

La matematica dell'incerto: l'ordine è raro, ma non impossibile

- Con 10 carte da gioco esistono potenzialmente 3.628.800 modi diversi di giocarle, una dopo l'altra, nel corso di una partita. Anche giocando 100 partite al giorno, tutti i giorni, dovrebbero passare quasi 100 anni per poter giocare le stesse 10 carte in tutti i diversi modi possibili...
- E con solo tre carte in più di anni ne servirebbero più di 170.000!



...e gli inganni della mente rispetto alle probabilità

- Il tranello delle scommesse e dei giochi a sorteggio:
- non è vero che un numero del lotto che non esce da molto tempo ha più probabilità di essere estratto nell'immediato futuro! In realtà ogni risultato fa storia a sé



I giochi coi dadi

- Vedi materiale.....



L'ordine nel caso

$$p = cf / cp$$

- f = frequenza = numero di esiti favorevoli
- Solo dopo un gran numero di prove $f=p$



- la matematica del gioco!!



Nessuno può vincere senza che un altro perda

- La teoria dei giochi è applicata a livello sociale, economico, militare e politico
 - Un gioco è determinato se:
- ogni partita termina dopo un n^{\wedge} finito di mosse
- entrambi i giocatori conoscono la disposizione completa del materiale di gioco
- la singola mossa è affidata alla scelta del giocatore che la compie



...allora...

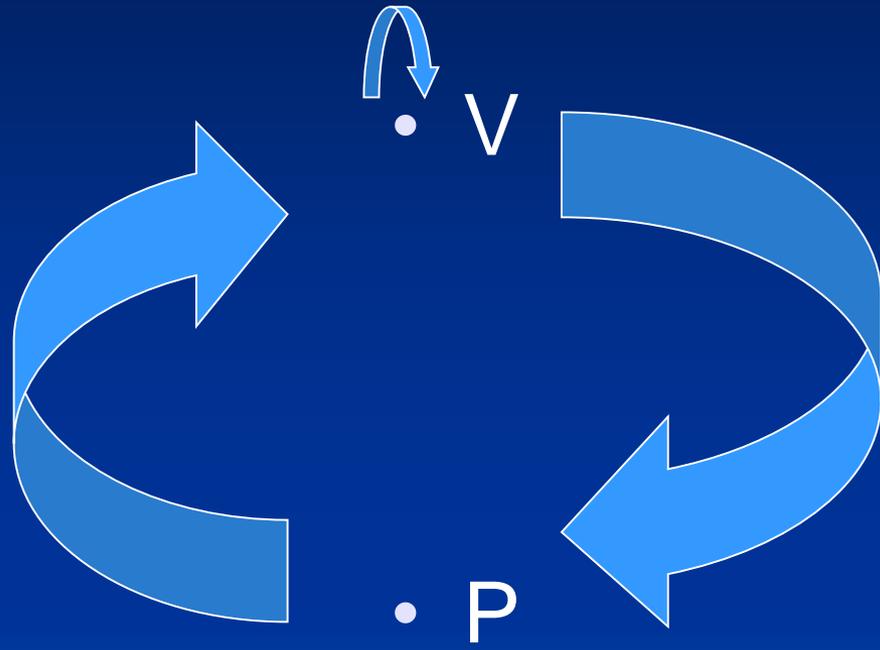
- è possibile individuare una strategia ottimale !

Occorre conoscere quali sono le configurazioni vincenti e quali quelle perdenti:



- *vincente*: vincita immediata o possibilità di almeno una mossa sfavorevole all'avversario
- *perdente*: sconfitta immediata o possibilità di sole mosse favorevoli all'avversario





Qual è la strategia vincente?

- La tavoletta di cioccolata

A							

- La strategia vincente è quella di partire consegnando all'avversario un pezzo quadrato, dal quale si potranno ricavare solo rettangoli...
- L'ultimo rettangolo utile è quello di una sola riga contenente l'A, dal quale il vincitore isolerà il quadretto con l'A



Con i fiammiferi: ricostruire a ritroso le possibili configurazioni alla ricerca di quelle vincenti

- Si mettono sul tavolo 15 fiammiferi in ordine sparso
- Dopo aver stabilito a chi spetta la prima mossa, ogni giocatore, a turno, deve togliere un numero di fiammiferi fra 1 e 4 a scelta
- Perde chi è costretto a prendere l'ultimo fiammifero



Config.	Caratt.	Mossa
0	V	0
1	P	-
2	V	1
3	V	2
4	V	3
5	V	4
6	P	-
7	V	1
8	V	2
9	V	3
10	V	4
11	P	-
12	V	1
13	V	2
14	V	3
15	V	4

..e per finire “ *I cammelli in eredità*”

Un uomo che stava morendo chiamò i tre figli per dividere così l'eredità di 17 cammelli: al primo la metà, al secondo la terza parte e al terzo la nona. I figli, non sapendo come fare, si rivolsero al giudice che arrivò con il suo cammello da unire agli altri: In questo modo al 1[^] figlio spettarono 9 cammelli, al 2[^] 6 e al 3[^] 2: il giudice, ripreso il suo cammello se ne andò, ringraziato dai tre fratelli soddisfatti



teoria della disponibilità

La bontà è l'unico investimento che non
fallisce mai

(Henry David Thoreau)

- Homo homini lupus? Sì, ma....
è' un comportamento che si può cambiare



La matematica della reciprocità

- La teoria delle catastrofi prevede che piccoli cambiamenti possano provocare conseguenze notevoli

“Giochi di reciprocità”

Robert Axelrod



- I matematici austriaci Martin Novak e Karl Sigmund hanno simulato al computer gli effetti di una popolazione di altruisti



essa ha maggiori possibilità di sopravvivenza

Ma perché?

- $P(X)$ = patrimonio individuale
- $P(T)$ = patrimonio di tutti
- Gesto di disponibilità (di A verso B) = azione compiuta da A che, a fronte di un piccolo decremento di $P(A)$ ($-M$) provoca un sensibile incremento di $P(B)$ ($+N$), senza ricadute sugli altri individui della società ($N > M$)



Così...

- $P'(A) = P(A) - M$
- $P'(B) = P(B) + N$
- $P'(T) = P(T) + N - M$
- Es: se $-M = -1$ e $N = 100$ si ha:
- $P'(A) = P(A) - 1$
- $P'(B) = P(B) + 100$
- $P'(T) = P(T) + 99$

Una buona notizia, finalmente...

- Se aumenta il $P(T)$ della collettività ci sarà sempre più probabilità di trovare persone disponibili nel momento del bisogno



ogni piccolo gesto di aiuto è un investimento
per il futuro!!!

essere disponibili conviene

Un problema culturale...che diventa matematico e viceversa



Il cervello umano è composto da circa cento miliardi di neuroni, ciascuno dei quali è in grado di attivare migliaia di possibili contatti con altri neuroni facendo crescere enormemente le potenzialità dell'organo

Dovremmo comportarci come i neuroni tenendo conto che il bene del tutto ha ricadute anche sulle singole parti!!!!



*vi lascio con questa buona
notizia e con l'augurio di
saperla sfruttare*

